

Die laminare Reihungsschicht an einer teilweise mitbewegten längsangeströmten ebenen Platte

Truckenbrodt, Erich

Veröffentlicht in:
Abhandlungen der Braunschweigischen
Wissenschaftlichen Gesellschaft Band 4, 1952,
S. 181-195



Friedr. Vieweg & Sohn, Braunschweig

Die laminare Reibungsschicht an einer teilweise mitbewegten längsangeströmten ebenen Platte*)

Von E. Truckenbrodt

Mit 10 Abbildungen

Vorgelegt von Herrn H. Schlichting

Summary: This paper gives a contribution to boundary layer control in the laminar flow along a flat plate. It is assumed, that the rear part of the wall is moving in its own plane with a velocity which is some fraction of the free stream velocity, whereas the front part is at rest. The main parameters of the boundary layer are calculated from the momentum and energy theory for different ratios of wall velocity to free stream velocity. In the case of an airfoil profile the moving rear part of the wall may help to prevent separation.

Übersicht: Es wird die laminare Reibungsschicht an einer längsangeströmten ebenen Platte berechnet für den Fall, daß die Platte sich im hinteren Teil ihrer Länge mit der Strömung mitbewegt, während der vordere Teil feststeht. Die Mitlaufgeschwindigkeit des hinteren Plattenteiles ist dabei kleiner als die Anströmungsgeschwindigkeit. Die Untersuchungen geben einen Beitrag zu der Frage, wie man durch Mitbewegen der Wand die Ablösung verhindern kann.

1. Einleitung

Bei der Umströmung von Körpern neigt die den Körper umgebende Reibungsschicht in dem Bereich des Druckanstieges (Körperhinterteil) leicht zur Rückströmung, was dann ihre Ablösung zur Folge hat. Ein Körper mit abgelöster Reibungsschicht besitzt einen stark vergrößerten Widerstand gegenüber einem Körper mit anliegender Reibungsschicht. Dient der Körper zur Auftriebserzeugung (Tragflügelprofil), so wird der erreichbare maximale Auftrieb ebenfalls entscheidend durch das Auftreten der Ablösung beeinflußt.

Um nun die Ablösung zu verhindern oder zumindest nach Stellen zu verschieben, die weiter stromabwärts liegen, kann man die Reibungsschicht durch Absaugen oder Ausblasen günstig beeinflussen. Dieser Fragenkomplex wurde ausgiebig von H. Schlichting untersucht. Wir verweisen auf die zusammenfassende Darstellung in seiner „Grenzschicht-Theorie“(**).

Eine andere Möglichkeit der Reibungsschichtbeeinflussung und insbesondere der Verhinderung der Ablösung besteht nun darin, die reibende Körperoberfläche an den gefährdeten Stellen in der Anströmungsrichtung mitzubewegen und dadurch die Rückströmung zu verhindern. In der vorliegenden Arbeit wird als Vorstudie zu diesem Problem an Stelle eines beliebigen Körpers der einfache Fall der ebenen Platte behandelt. Wir beschränken uns zunächst auf den laminaren Strömungszustand, behalten uns aber vor, später auch einmal den technisch wichtigeren Fall der turbulenten Strömung zu bearbeiten. Bei unseren Untersuchungen nehmen wir an, daß

*) Die vorliegenden Untersuchungen wurden durch die Deutsche Forschungsgemeinschaft unterstützt.

**) H. Schlichting, Grenzschicht-Theorie, Verlag G. Braun, Karlsruhe, 1951.

die Geschwindigkeit des mitbewegten Plattenteiles kleiner oder gleich der Anströmungsgeschwindigkeit ist. Die Methode der mitbewegten Körperoberfläche hat gegenüber dem Verfahren des Absaugens insofern einen Nachteil, als es damit nicht möglich ist, die Stabilität der laminaren Reibungsschicht zu erhöhen*), um so die Lage des Umschlagspunktes vom laminaren in den turbulenten Zustand günstig zu beeinflussen.

2. Grundlagen des Verfahrens

Abb. 1 zeigt eine schematische Darstellung der unserer Aufgabe zugrunde liegenden Verhältnisse. Die Platte wird mit der Geschwindigkeit U angeströmt. Während im vorderen Teil ($0 \leq x \leq l$) die Platte feststeht, wird sie von der

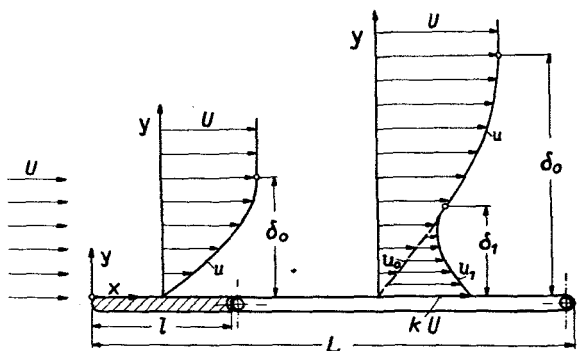


Abb. 1. Erläuterungsskizze.

Stelle $x = l$ an in Strömungsrichtung mitbewegt. Technisch ausgeführt denken wir uns den mitbewegten Teil der Platte z. B. so, daß ein endloses Band über zwei Rollen, die sich an den Stellen $x = l$ und $x = L$ befinden, umläuft. Die Geschwindigkeit dieses umlaufenden Bandes sei $k \cdot U$, wobei wir $0 \leq k \leq 1$ wählen wollen. Wir betrachten also Verhältnisse, bei denen die Geschwindigkeit des mitbewegten Teils der Platte kleiner oder gleich der Anströmungsgeschwindigkeit ist.

In dem feststehenden vorderen Teil der Platte bildet sich die Reibungsschicht in bekannter Weise aus. Infolge der Haftbedingung besitzt die örtliche Geschwindigkeit u an der Plattenoberfläche den Wert Null und nähert sich bei größeren Wandabständen asymptotisch dem Wert der Anströmungsgeschwindigkeit U .

Wird nun von der Stelle $x = l$ an die Plattenoberfläche mit der Geschwindigkeit kU fortbewegt, so überlagert sich der Geschwindigkeitsverteilung u_0 der feststehenden Platte noch eine Zusatzgeschwindigkeitsverteilung u_1 , deren besonderes Merkmal es ist, an der Oberfläche infolge der Haftbedingung die örtliche Geschwindigkeit kU zu besitzen. Bei größeren Wandabständen

*) Die Geschwindigkeitsprofile des mitbewegten Plattenteils besitzen stets einen Wendepunkt, der zur Instabilität Anlaß gibt.

klingt dieser sekundäre Einfluß allmählich gegen Null ab. Je weiter wir uns stromabwärts von dem Punkt $x = l$ befinden, um so weiter wird auch diese Zusatzverteilung nach außen reichen.

Die mathematische Formulierung unseres Problems finden wir in bekannter Weise aus den Grenzschichtgleichungen, die für unseren Fall folgendermaßen lauten:

$$\left. \begin{aligned} u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} &= \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \\ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

Hierin bedeuten u und v die Geschwindigkeitskomponenten in x -Richtung bzw. in y -Richtung.

Die Randbedingungen erhält man aus dem oben Gesagten zu

$$\left. \begin{aligned} 0 \leq x \leq l : k &= 0; \quad y = 0 : u = 0; \quad v = 0; \quad y = \infty : u = U \\ l \leq x \leq L : k &\neq 0; \quad y = 0 : u = kU; \quad v = 0; \quad y = \infty : u = U. \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

Das Auffinden der exakten Lösung der Gleichungen (1) und (2) ist recht mühsam, so daß wir im folgenden ein Näherungsverfahren entwickeln wollen, das später einmal auf den bereits in der Einleitung erwähnten Fall der Strömungen mit Druckgradienten (Profile) erweitert werden kann. Zu diesem Zweck führen wir endliche Reibungsschichtdicken ein. Und zwar nehmen wir an, daß die Grundgeschwindigkeitsverteilung u_0 bis zum Abstand $y = \delta_0$ und die Zusatzgeschwindigkeitsverteilung u_1 bis zum Abstand $y = \delta_1$ ihre asymptotischen Werte erreicht haben (Abb. 1). Für die Geschwindigkeitsverteilung machen wir den Ansatz

$$u = u_0(\eta_0) + u_1(\eta_1), \quad (3)$$

wobei wir die dimensionslosen Wandabstände

$$\eta_0 = \frac{y}{\delta_0} \quad \text{und} \quad \eta_1 = \frac{y}{\delta_1} \quad (4)$$

eingeführt haben. $u_0(\eta_0)$ und $u_1(\eta_1)$ betrachten wir im folgenden als bekannte Funktionen, deren analytische Ausdrücke in Abschnitt 3 mitgeteilt sind.

Die Randbedingungen lauten nach (2)

$$\left. \begin{aligned} y = 0 : u_0 &= 0; \quad u_1 = kU \\ y \geq \delta_0 : u_0 &= U; \quad y \geq \delta_1 : u_1 = 0. \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

Wir führen noch das Reibungsschichtdickenverhältnis

$$\Delta = \frac{\delta_1}{\delta_0} \quad (6)$$

ein. Außerdem merken wir noch an, daß wir den jeweils größten Wert der Reibungsschichtdicken δ_0 oder δ_1 mit δ bezeichnen wollen.

Nach Wahl bestimmter Ansätze für $u_0(\eta_0)$ und $u_1(\eta_1)$, vergl. Abschn. 3, stellen die Grenzschichtdicken δ_0 und δ_1 die beiden Unbekannten unseres Problems dar. Zu ihrer Bestimmung verwenden wir den Impulssatz und den Energiesatz, die man durch entsprechende Integrationen der Grenzschicht-

differentialgleichungen (1) über dem Wandabstand erhält. Diese beiden Sätze lauten nach E. Truckenbrodt*)

$$\frac{d\vartheta}{dx} = \frac{\tau_0}{\varrho U^2} \quad (7)$$

und

$$\vartheta \frac{d\bar{H}}{dx} = 2 \frac{d}{\varrho U^3} - \bar{H} \frac{\tau_0}{\varrho U^2} \quad (8)$$

Hierin bedeuten:

$$\vartheta = \int_0^{\delta} \frac{u}{U} \left(1 - \frac{u}{U}\right) dy = \text{Impulsverlustdicke,} \quad (9)$$

$$\delta = \int_0^{\delta} \frac{u}{U} \left[1 - \left(\frac{u}{U}\right)^2\right] dy = \text{Energieverlustdicke,} \quad (10)$$

$$\bar{H} = \frac{\bar{\delta}}{\vartheta} = \text{Reibungsschichtdickenverhältnis,} \quad (11)$$

$$\frac{\tau_0}{\varrho U^2} = \frac{\nu}{U^2} \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_0 = \text{Wandschubspannung,} \quad (12)$$

$$\frac{d}{\varrho U^3} = - \frac{\nu}{U^3} \int_0^{\delta} \frac{u}{U} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} dy = \text{Schubspannungsarbeit (Dissipation).} \quad (13)$$

Der Vollständigkeit halber seien noch die Formeln für die Verdrängungsdicke

$$\delta^* = \int_0^{\delta} \left(1 - \frac{u}{U}\right) dy, \quad (14)$$

sowie das Reibungsschichtdickenverhältnis

$$H = \frac{\delta^*}{\vartheta} \quad (15)$$

angegeben.

Setzen wir die vorgegebene Geschwindigkeitsverteilung nach (3) in die entsprechenden Gleichungen ein, dann lassen sich die folgenden Beziehungen ein für allemal berechnen:

$$\left. \begin{aligned} f_1(k, \Delta) &= \frac{\delta^*}{\delta_0}, & f_2(k, \Delta) &= \frac{\vartheta}{\delta_0}, & f_3(k, \Delta) &= \frac{\bar{\delta}}{\delta_0}, \\ f_4(k, \Delta) &= \frac{\delta_0 \tau_0}{\mu U} = \frac{U \delta_0}{\nu} \frac{\tau_0}{\varrho U^2}, \\ f_5(k, \Delta) &= \frac{\delta_0 d}{\mu U^2} = \frac{U \delta_0}{\nu} \frac{d}{\varrho U^3}. \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

und

Über die zahlenmäßige Auswertung wird im Abschnitt 3 berichtet.

*) E. Truckenbrodt: Ein Quadraturverfahren zur Berechnung der laminaren und turbulenten Reibungsschicht bei ebener und rotationsymmetrischer Strömung. 1951. Erscheint demnächst im Ingenieur-Archiv.

Wir setzen jetzt (16) in (7) und (8) ein und erhalten

$$\frac{U \vartheta}{\nu} \frac{d\vartheta}{dx} = f_2 f_4 \quad (17)$$

und

$$\frac{U \vartheta}{\nu} \vartheta \frac{d\bar{H}}{dx} = 2f_2 f_5 - f_3 f_4. \quad (18)$$

Hierbei haben wir berücksichtigt, daß das Reibungsschichtdickenverhältnis $\bar{H} = \bar{\delta}/\vartheta$ durch

$$\bar{H} = \frac{f_3}{f_2}(k, \Delta) \quad (19)$$

gegeben ist.

Es bezeichnet \bar{H}_0 den Wert von \bar{H} für $\Delta = 0$, der im übrigen gleichbedeutend ist mit dem Wert für $k = 0$. Ferner führen wir noch die Abkürzung

$$Z = \bar{H} - \bar{H}_0 \quad (20)$$

ein. Unter Beachtung von (19) können wir dann das Reibungsschichtdickenverhältnis $\Delta = \delta_1/\delta_0$ auch durch Z ausdrücken:

$$\Delta = F(k, Z). \quad (21)$$

Für die im folgenden Abschnitt gewählte Geschwindigkeitsverteilung ist dieser Zusammenhang in Abb. 2 dargestellt. Mittels (21) lassen sich dann auch die Funktionen (16) in Abhängigkeit von k und Z schreiben.

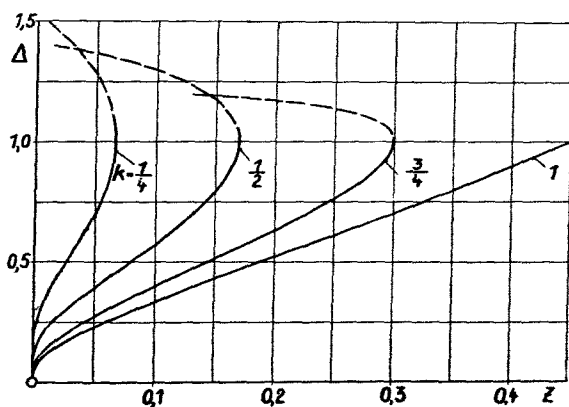


Abb. 2. Die Funktion $\Delta = F(k, Z)$.

Zur weiteren Vereinfachung führen wir noch die Abkürzungen

$$\Theta = \frac{U \vartheta}{\nu} \vartheta, \quad (22)$$

$$g(k, Z) = 2f_2 f_4 \quad (23)$$

und

$$h(k, Z) = 2f_2 f_5 - f_3 f_4 \quad (24)$$

ein und finden für (17) und (18)

$$\frac{d\Theta}{dx} = g(k, Z), \quad (25)$$

$$\Theta \frac{dZ}{dx} = h(k, Z). \quad (26)$$

Dieses sind nun zwei Gleichungen für die beiden Unbekannten Θ und Z . Wir vereinfachen noch weiter, indem wir (25) durch (26) dividieren, wodurch die Abhängigkeit von x verschwindet. Nach Ausführung der Integration ergibt sich

$$\frac{\Theta}{\Theta_0} = e^{\int_0^Z \frac{g}{h}(k, Z) dZ}; \quad x \geq l. \quad (27)$$

Θ_0 stellt den Wert der Impulsverlustdicke an der Stelle $x = l$ dar. Er berechnet sich aus (25) zu

$$\Theta_0 = g_0 \cdot l. \quad (28)$$

Die Funktion $g(k=0, Z) = g_0$ ist unabhängig von Z .

Wir setzen jetzt (27) und (28) in (26) ein und finden den Zusammenhang zwischen Z und x wie folgt:

$$\frac{x-l}{l} = \int_0^Z \frac{g_0}{h(k, Z)} e^{\int_0^Z \frac{g}{h}(k, Z) dZ} dZ; \quad x \geq l. \quad (29)$$

Hat man $Z(k, \frac{x-l}{l})$ bestimmt, so findet man nach (27) sofort $\frac{\Theta}{\Theta_0}(k, \frac{x-l}{l})$, vgl. Abb. 3.

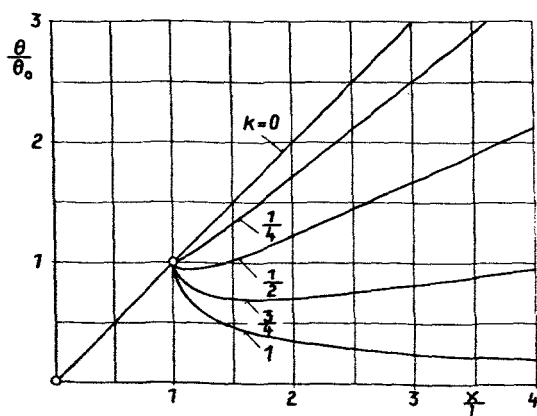


Abb. 3. Die Impulsverlustdicke

$$\frac{\Theta}{\Theta_0}\left(k, \frac{x-l}{l}\right), \quad \frac{\Theta}{l} = \frac{0,655}{\sqrt{U l}} \sqrt{\frac{\Theta}{\Theta_0}}.$$

Für den feststehenden Teil der Platte ($0 \leq x \leq l$) gilt in bekannter Weise

$$\frac{\Theta}{\Theta_0} = \frac{x}{l}; \quad 0 \leq x \leq l. \quad (30)$$

Die asymptotische Lösung für sehr große Abstände $\frac{x-l}{l}$ erhält man, wenn $h \rightarrow 0$ geht. Dann ergeben sich, wie aus (26) sofort ersichtlich ist, affine Geschwindigkeitsverteilungen ($Z = \text{konst.}$)*.

Bezeichnet g_∞ den Wert der Funktion $g(k, Z)$, bei dem $h(k, Z) = 0$ ist, dann erhält man die asymptotische Lösung für die Impulsverlustdicke zu

$$\frac{\Theta}{\Theta_0} = \frac{g_\infty}{g_0} \frac{x}{l}; \quad x \rightarrow \infty. \quad (31)$$

Für den Fall $k = 1$, wo die Anströmungsgeschwindigkeit gleich der Geschwindigkeit des mitbewegten Plattenteiles ist, stellt sich eine konstante Geschwindigkeitsverteilung ein. Es strebt dann die Impulsverlustdicke dem Wert Null zu.

Aus $\frac{\Theta}{\Theta_0} \left(\frac{x}{l} \right)$ kann man sofort sämtliche Reibungsschichtgrößen entsprechend den Formeln der Tabelle 1 bestimmen.

Tabelle 1: Formeln zur Berechnung der Reibungsschichtgrößen

Impulsverlustdicke	$\sqrt{\frac{U l}{\nu}} \frac{\vartheta}{l}$	$\sqrt{g_0} \sqrt{\frac{\Theta}{\Theta_0}}$
Verdrängungsdicke	$\sqrt{\frac{U l}{\nu}} \frac{\delta^*}{l}$	$\sqrt{g_0} H \sqrt{\frac{\Theta}{\Theta_0}}$
Reibungsschichtdicken	$\sqrt{\frac{U l}{\nu}} \frac{\delta_0}{l}$	$\frac{\sqrt{g_0}}{f_2} \sqrt{\frac{\Theta}{\Theta_0}}$
	$\sqrt{\frac{U l}{\nu}} \frac{\delta_1}{l}$	$\Delta \frac{\sqrt{g_0}}{f_2} \sqrt{\frac{\Theta}{\Theta_0}}$
Wandschubspannung	$\sqrt{\frac{U l}{\nu}} \frac{\tau_0}{\varrho U^2}$	$\frac{g}{2 \sqrt{g_0}} \sqrt{\frac{\Theta_0}{\Theta}}$
Widerstandsbeiwerte	$\sqrt{\frac{U L}{\nu}} c_f$	$2 \sqrt{g_0} \sqrt{\frac{\Theta}{\Theta_0}} \left(\frac{L}{l} \right) \sqrt{\frac{l}{L}}$
	$\sqrt{\frac{U L}{\nu}} c_f^*$	$\left(\sqrt{\frac{U L}{\nu}} c_f - 2 \sqrt{g_0} \sqrt{\frac{l}{L}} \right) \frac{L}{L-l}$

*) Die asymptotische Lösung läßt sich durch Integration der Grenzschichtgleichungen folgendermaßen exakt finden:

Wir setzen

$$\eta = y \sqrt{\frac{U}{\nu x}}, \quad \varphi = \sqrt{\nu x} U f(\eta), \quad u = U f'(\eta) \quad \text{und} \quad v = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\nu U}{x}} (\eta f' - f)$$

und erhalten die Differentialgleichung $f f'' + 2 f''' = 0$

mit den Randbedingungen $\eta = 0 : f = 0; \quad f' = k$ und $\eta = \infty : f' = 1$.

$k = 0$ stellt die Lösung für die längsangeströmte ebene Platte von Blasius dar. Für $k = 1$ lautet die Lösung $f = \eta$ bzw. $f' = 1$; d.h. konstante Geschwindigkeitsverteilung.

Den Widerstandsbeiwert der einseitig benetzten Platte der Länge L erhält man in bekannter Weise zu

$$c_l = \frac{W}{\frac{\rho}{2} U^2 \cdot F} = 2 \frac{\vartheta(L)}{L}. \quad (32)$$

Ist nur der Widerstand des mitbewegten Teils der Platte W^* gesucht, dann gilt bezogen auf die Fläche des mitbewegten Teils der Platte für den Widerstandsbeiwert

$$c_l^* = \frac{W^*}{\frac{\rho}{2} U^2 \cdot F^*} = 2 \frac{\vartheta(L) - \vartheta(l)}{L - l}. \quad (33)$$

Ist $c_l^* < 0$, dann muß die Platte angetrieben werden, um die entsprechende Geschwindigkeit kU an der Platte zu erzeugen. Ist dagegen $c_l^* > 0$, dann muß die Platte gebremst werden. Die entsprechenden Formeln zur Berechnung von c_l und c_l^* sind in Tabelle 1 angegeben. Die Antriebs- bzw. Bremsleistung beträgt

$$N = -k U W^* = -k \frac{\rho}{2} U^3 \cdot F^* \cdot c_l^*. \quad (34)$$

3. Durchführung der Rechnung

Um das im vorigen Abschnitt dargelegte Verfahren anwenden zu können, müssen wir eine Annahme für die Geschwindigkeitsverteilung nach (3) treffen.

Wie wir später noch zeigen werden, kommen für unsere Rechnungen ($0 \leq k \leq 1$) nur Werte $\Delta = \delta_1/\delta_0 \leq 1$ in Frage. Wir verzichten daher darauf, auch die Formeln für $\Delta \geq 1$ anzugeben.

Wir machen nun für (3) den Ansatz

$$\left. \begin{aligned} \frac{u}{U} &= \sin\left(\frac{\pi}{2} \frac{y}{\delta_0}\right) + k \left[1 - \sin\left(\frac{\pi}{2} \frac{y}{\delta_1}\right) \right] \quad \text{für } 0 \leq y \leq \delta_1 \\ \text{und} \quad \frac{u}{U} &= \sin\left(\frac{\pi}{2} \frac{y}{\delta_0}\right) \quad \text{für } \delta_1 \leq y \leq \delta_0, \end{aligned} \right\} \quad (35)$$

der, wie man sich leicht überzeugt, die Randbedingungen (5) erfüllt*).

Die in (16) angegebenen Funktionen erhält man durch elementare Auswertung der entsprechenden Formeln. Im einzelnen finden wir

$$f_1(k, \Delta) = \left(1 - \frac{2}{\pi}\right) (1 - \Delta k), \quad (36)$$

$$f_2(k, \Delta) = \frac{2}{\pi} - \frac{1}{2} - \left[\frac{4}{\pi} - \left(1 - \frac{2}{\pi}\right) \Delta - \frac{4}{\pi} \frac{\cos \Delta \frac{\pi}{2}}{1 - \Delta^2} \right] k - \left(\frac{3}{2} - \frac{4}{\pi} \right) \Delta k^2, \quad (37)$$

$$\begin{aligned} f_3(k, \Delta) &= \frac{2}{3\pi} - \left[\left(\frac{1}{2} + \frac{2}{\pi} \right) \Delta - \frac{3}{2\pi} \frac{\sin \Delta \pi - 8 \Delta^3}{1 - 4 \Delta^2} \right] k \\ &\quad - \frac{6}{\pi (4 - \Delta^2)} \left[6 - \Delta^2 - 6 \frac{\cos \Delta \frac{\pi}{2}}{1 - \Delta^2} \right] k^2 - \left(\frac{5}{2} - \frac{22}{3\pi} \right) \Delta k^3, \end{aligned} \quad (38)$$

*) Daß der hier gewählte sinus-Ansatz im Fall der ruhenden Wand eine gute Näherung darstellt, wird in der Grenzschicht-Theorie von H. Schlichting gezeigt.

$$f_4(k, \Delta) = \frac{\pi}{2} \left(1 - \frac{k}{\Delta} \right), \quad (39)$$

$$f_5(k, \Delta) = \frac{\pi^2}{8} + \pi \left(\frac{1}{2} - \frac{\cos \Delta \frac{\pi}{2}}{1 - \Delta^2} \right) k - \frac{\pi}{8} (4 - \pi) \frac{k^2}{\Delta}. \quad (40)$$

Die zahlenmäßige Auswertung dieser Formeln ist in Tabelle 2 angegeben.

Tabelle 2: Die Konstanten zur Berechnung der Funktionen f_2 bis f_5 .

Δ	A	B	C	D	E	F	G
0	0,13662	0	0	0,21221	0	0	0
0,1		0,03337	0,02288		0,03605	0,00190	0,01657
0,2		0,06082	0,04535		0,07040	0,00765	0,03315
0,3		0,08244	0,06803		0,10143	0,01720	0,04972
0,4		0,09840	0,09070		0,12767	0,03047	0,06629
0,5		0,10887	0,11338		0,14789	0,04743	0,08287
0,6		0,11416	0,13606		0,16112	0,06794	0,09944
0,7		0,11453	0,15873		0,16675	0,09193	0,11601
0,8		0,11040	0,18141		0,16445	0,11916	0,13258
0,9		0,10209	0,20408		0,15429	0,14972	0,14916
1,0	0,13662	0,09015	0,22676	0,21221	0,13662	0,18310	0,16573
$f_2 = A + Bk - Ck^2$				$f_3 = D + Ek - Fk^2 - Gk^3$			

Δ	H	J		K	L	M	
0	1,57080	∞		1,23370	1,57080	∞	
0,1		15,70796			1,56347	3,37095	
0,2		7,85398			1,54154	1,68548	
0,3		5,23599			1,50523	1,12365	
0,4		3,92699			1,45493	0,84274	
0,5		3,14159			1,39112	0,67419	
0,6		2,61799			1,31450	0,56182	
0,7		2,24400			1,22575	0,48157	
0,8		1,96350			1,12591	0,42137	
0,9		1,74533			1,01573	0,37455	
1,0	1,57080	1,57080		1,23370	0,89660	0,33710	
$f_4 = H - Jk$				$f_5 = K - Lk - Mk^2$			

Das Reibungsschichtdickenverhältnis \bar{H} ist nach (19) berechnet und in Tabelle 3a mitgeteilt worden. In der Nähe des Punktes $\Delta = 0$ nimmt \bar{H} zunächst mit Δ ab, was aber nicht brauchbar ist, da die Funktion $h = 2f_2/f_5 - f_3/f_4$ in (18), wie sich aus den Rechnungen ergibt, stets positiv ist. Um diesen Umstand zu vermeiden, haben wir angenommen, daß sich der für jeden k -Wert vorkommende kleinste Wert \bar{H} auch für $\Delta = 0$ ergibt. Der Wert \bar{H}_{\min} stellt also auch den Wert \bar{H}_0 dar, den wir ebenfalls in Tabelle 3a angegeben haben. Nach (20) haben wir dann die Größe $Z(k, \Delta)$ ermittelt. Den Verlauf $\Delta = F(k, Z)$ haben wir in Abb. 2 dargestellt.

Tabelle 3: Die Reibungsschichtdickenverhältnisse

a) $\bar{H}(k, \Delta) = \bar{\delta}/\vartheta$ und b) $H(k, \Delta) = \delta^*/\vartheta$.

$\Delta \backslash k$	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{4}$	1
0	1,5533	1,5533	1,5533	1,5533	1,5533
0,1		1,5384	1,5422	1,5528	1,5599
0,2		1,5357	1,5502	1,5742	1,5899
0,3		1,5409	1,5694	1,6082	1,6336
0,4		1,5506	1,5945	1,6491	1,6846
0,5		1,5625	1,6222	1,6925	1,7395
0,6		1,5747	1,6492	1,7355	1,7952
0,7		1,5859	1,6738	1,7760	1,8505
0,8		1,5947	1,6937	1,8111	1,9040
0,9		1,6004	1,7071	1,8374	1,9526
1,0	1,5533	1,6024	1,7122	1,8487	2,0000
\bar{H}_0	1,5533	1,5355	1,5422	1,5485	1,5515

a)

$$H(k, \Delta) = \frac{f_3}{f_2}$$

$\Delta \backslash k$	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{4}$	1
0	2,6598	2,6598	2,6598	2,6598	2,6598
0,1		2,4681	2,3382	2,2576	2,2201
0,2		2,3170	2,1006	1,9707	1,9114
0,3		2,1972	1,9205	1,7581	1,6842
0,4		2,1025	1,7818	1,5957	1,5107
0,5		2,0287	1,6750	1,4700	1,3753
0,6		1,9716	1,5929	1,3716	1,2670
0,7		1,9300	1,5318	1,2955	1,1795
0,8		1,9015	1,4886	1,2383	1,1078
0,9		1,8851	1,4626	1,2002	1,0494
1,0	2,6598	1,8797	1,4535	1,1848	1,0000

b)

$$H(k, \Delta) = \frac{f_1}{f_2}$$

In Tabelle 3b haben wir das Reibungsschichtdickenverhältnis $H = f_1/f_2$ nach (15) angegeben.

Gemäß (23) und (24) haben wir jetzt die Funktionen g und h berechnet. Ihre Zahlenwerte sind in Tabelle 4 mitgeteilt. Für den Fall der feststehenden Platte ($k = 0$) gilt

$$V_{g_0} = 0,6551, \quad (41)$$

während der exakte Wert nach Blasius $\sqrt{V_{g_0}} = 0,664$ lautet.

Die Funktion h ist stets positiv; sie erreicht bei $\Delta = 1$ ihren kleinsten Wert. Die Bedingung $h = 0$ für die asymptotische Lösung ist mit Ausnahme des Falles $k = 1$ also nicht erfüllt. Das erklärt sich daraus, daß die Geschwindigkeitsverteilungen nur näherungsweise richtig sind. Wir nehmen nun an, daß die asymptotische Lösung dann gegeben ist, wenn h seinen kleinsten Wert erreicht hat; das heißt bei $\Delta = 1$. Wir bezeichnen diese Stelle mit x_∞ .

Unter Beachtung von (31) wird dann für die Abstände $x \geq x_\infty$

$$\frac{\theta}{\theta_0} = \frac{\theta}{\theta_0} \left(\frac{x_\infty}{l} \right) + \frac{g_\infty}{g_0} \left(\frac{x}{l} - \frac{x_\infty}{l} \right). \quad (42)$$

Hierin ist

$$\frac{g_{\infty}}{g_0} = (1 - k)^3 \left[1 + 2,6598 \frac{k}{1 - k} \right]. \quad (43)$$

Tabelle 4: Die Funktionen $g(k, \Delta)$ und $h(k, \Delta)$ nach (23) und (24); $g(\Delta = 1) = g_{\infty}$.

$\Delta \backslash k$	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{4}$	1
0	0,4292	$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$
0,1		-0,6765	-1,8553	-3,0404	-4,1651
0,2		-0,1170	-0,7337	-1,3541	-1,9112
0,3		0,0801	-0,3368	-0,7548	-1,1071
0,4		0,1833	-0,1281	-0,4382	-0,6801
0,5		0,2462	0	-0,2427	-0,4150
0,6		0,2871	0,0836	-0,1144	-0,2403
0,7		0,3137	0,1384	-0,0299	-0,1244
0,8		0,3302	0,1726	0,0230	-0,0515
0,9		0,3390	0,1908	0,0515	-0,0120
1,0	0,4292	0,3416	0,1964	0,0602	0

a) $\mathbb{T}g(k, \Delta)$

$\Delta \backslash k$	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{4}$	1
0	0,0038	∞	∞	∞	∞
0,1		0,7018	1,3152	1,8114	2,1582
0,2		0,3113	0,5816	0,7929	0,9130
0,3		0,1791	0,3287	0,4381	0,4829
0,4		0,1122	0,1986	0,2556	0,2657
0,5		0,0722	0,1203	0,1470	0,1412
0,6		0,0465	0,0703	0,0794	0,0682
0,7		0,0300	0,0385	0,0381	0,0276
0,8		0,0198	0,0195	0,0149	0,0079
0,9		0,0145	0,0099	0,0041	0,0010
1,0	0,0038	0,0129	0,0072	0,0014	0

b) $h(k, \Delta)$

Aus (27) und (29) haben wir jetzt durch graphische Integrationen die Impulsverlustdicke $\frac{\theta}{\theta_0} \left(k, \frac{x-l}{l} \right)$ bestimmt. Das Ergebnis ist in Tabelle 5 mitgeteilt und in Abb. 3 aufgetragen. Die Impulsverlustdicken bei mitbewegter Platte sind kleiner als diejenigen der feststehenden Platte. Für $k = 1$ strebt die Impulsverlustdicke dem Wert Null zu.

In einfacher Weise haben wir jetzt aus den Impulsverlustdicken die Reibungsschichtgrößen nach Tabelle 1 berechnet. Die Ergebnisse sind in den Abb. 4, 5, 6, 7 und 8 aufgetragen. Danach gilt im einzelnen:

Für die Verdrängungsdicke (Abb. 4) gilt das für die Impulsverlustdicke bereits Gesagte. Die Reibungsschichtdicke δ_0 (Abb. 5) unterscheidet sich für die verschiedenen Werte von k nicht viel. Das Reibungsschichtdickenverhältnis $\Delta = \delta_1/\delta_0$ (Abb. 5) steigt verhältnismäßig schnell vom Wert 0 bei $\frac{x}{l} = 1$ auf den Wert 1 bei $\frac{x}{l} = \infty$. Die Wandschubspannung (Abb. 6) ist an der Stelle $\frac{x}{l} = 1$ negativ. Bei kleineren Werten von k nimmt sie aber sehr schnell positive Werte an. Bei $k = 1$ bleiben die Werte stets negativ.

Tabelle 5:

Die Impulsverlustdicke $\frac{\Theta}{\Theta_0}$ in Abhängigkeit von k und Δ bzw. $\frac{x}{l}$; $\frac{x}{l} (\Delta = 1) = \frac{x_\infty}{l}$.
Zu Abb. 3.

k	$\frac{1}{4}$		$\frac{1}{2}$		$\frac{3}{4}$		1	
Δ	x/l	Θ/Θ_0	x/l	Θ/Θ_0	x/l	Θ/Θ_0	x/l	Θ/Θ_0
0	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00
0,1	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	0,995	1,00	0,982
0,2	1,00	1,00	1,00	0,988	1,01	0,960	1,01	0,923
0,3	1,03	1,00	1,02	0,969	1,03	0,905	1,04	0,849
0,4	1,04	1,009	1,06	0,947	1,08	0,843	1,09	0,740
0,5	1,10	1,040	1,14	0,935	1,15	0,781	1,17	0,639
0,6	1,19	1,100	1,25	0,952	1,28	0,731	1,32	0,534
0,7	1,34	1,204	1,45	1,004	1,50	0,695	1,58	0,430
0,8	1,54	1,360	1,79	1,132	1,98	0,699	2,12	0,320
0,9	1,75	1,520	2,29	1,350	2,99	0,820	4,10	0,202
1,0	1,85	1,590	2,69	1,528	4,81	1,060	∞	0

asymptotische Werte $\left(\frac{x}{l} \geq \frac{x_\infty}{l}\right)$			
k	$\frac{\Theta}{\Theta_0}$	$\frac{1}{2}$	$0,297 + 0,458 \frac{x}{l}$
0	$\frac{x}{l}$	$\frac{3}{4}$	$0,385 + 0,140 \frac{x}{l}$
$\frac{1}{4}$	$0,118 + 0,796 \frac{x}{l}$	1	0

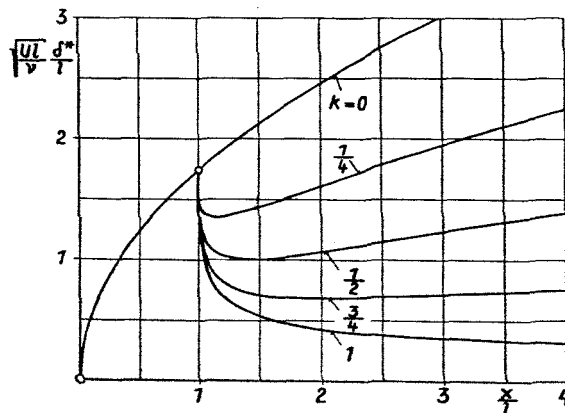


Abb. 4. Die Verdrängungsdicke $\frac{\delta^*}{l} \left(k, \frac{x}{l}\right)$.

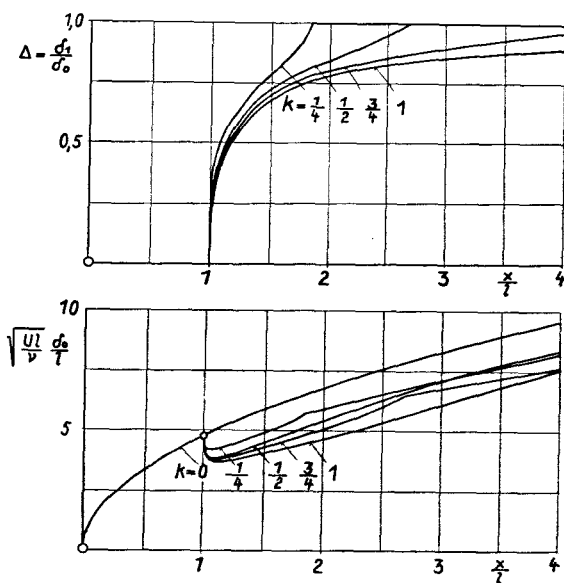


Abb. 5. Die Reibungsschichtdicke $\frac{\delta_0}{l} \left(k, \frac{x}{l} \right)$, sowie das Reibungsschichtdickenverhältnis $\Delta = \frac{\delta_1}{\delta_0} \left(k, \frac{x}{l} \right)$.

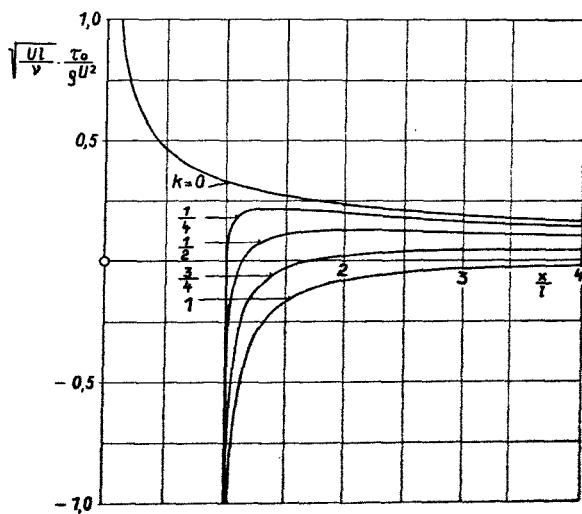


Abb. 6. Die Wandschubspannung $\frac{\tau_0}{\rho U^2} \left(k, \frac{x}{l} \right)$.

Die Widerstandsbeiwerte der gesamten Platte (Abb. 7) nehmen mit größer werdendem k -Wert stark ab. Sie streben für große Werte L/l den Werten $\sqrt{\frac{U L}{\nu}} c_f = 2 \sqrt{g_\infty}$ zu, die in Abb. 7 mit angegeben sind.

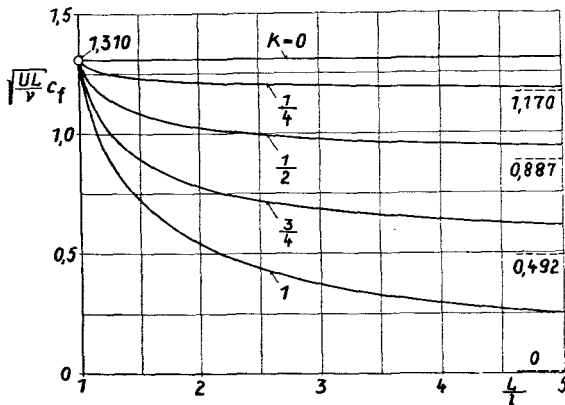


Abb. 7. Der Widerstandsbeiwert der gesamten Platte $c_f = \frac{W}{\frac{\rho}{2} U^2 F}$.

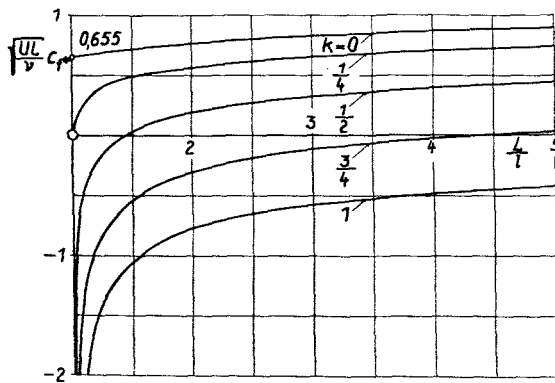


Abb. 8. Der Widerstandsbeiwert des mitbewegten Teiles der Platte $c_f^* = \frac{W^*}{\frac{\rho}{2} U^2 F^*}$.

Die Widerstandsbeiwerte des mitbewegten Teils (Abb. 8) der Platte können, wie bereits oben erwähnt wurde, positiv oder negativ sein. Für $c_f^* > 0$ muß die Platte gebremst werden, um die entsprechende Plattengeschwindigkeit zu erhalten. Für $c_f^* < 0$ muß sie angetrieben werden.

Ausgehend von (35) haben wir einige Geschwindigkeitsprofile berechnet. Abb. 9a zeigt die asymptotischen Verteilungen, bei denen $\Delta = 1,0$ ist. In

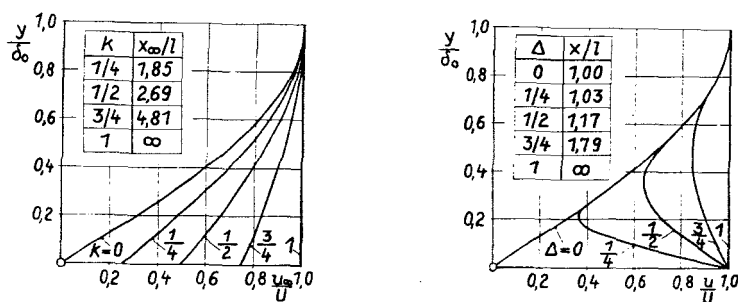


Abb. 9. Einige Geschwindigkeitsprofile

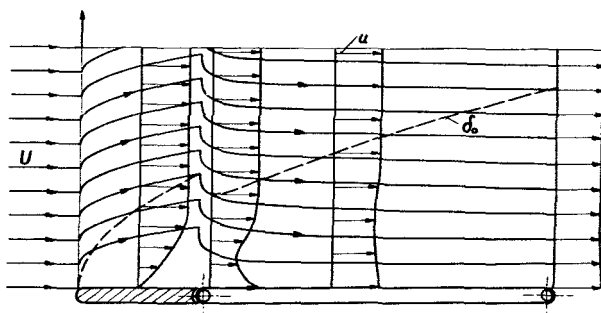
a) Die asymptotischen Profile, $\Delta = 1$ b) Die Profile für $k = 1$.Abb. 10. Das Stromlinienbild für den Fall $k = 1$ (Wandgeschwindigkeit = Außengeschwindigkeit),(Ordinaten $\frac{1}{5} \sqrt{\frac{U l}{\nu}}$ -fach überhöht).

Abb. 9b sind für den Fall $k = 1$ die Geschwindigkeitsprofile längs der Lauflänge bzw. für verschiedene Werte von Δ dargestellt. Für diesen Fall ist in Abb. 10 das Stromlinienbild gezeichnet.

4. Zusammenfassung

Es wird die Reibungsschichtbeeinflussung infolge teilweisen Mitbewegens der Wand an dem einfachen Fall der längs angeströmten ebenen Platte bei laminarer Strömung untersucht. Das Mitbewegen der Körperoberfläche stellt eine Möglichkeit dar, die Rückströmung und damit die Neigung zur Strömungsablösung an Körpern, die einen Druckanstieg aufweisen, zu verhindern. Die Berechnung der Grenzschicht wird für verschiedene Verhältnisse der Geschwindigkeit des mitbewegten Plattenteiles zur Anströmungsgeschwindigkeit ausgeführt. Insbesondere kann aus den Rechnungen entnommen werden, in welchen Fällen für die Bewegung der Wand eine Antriebs- bzw. eine Bremsleistung aufzuwenden ist.

Institut für Strömungsmechanik der T. H. Braunschweig.